Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$ i neka za $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ važi

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Važi

$$\|f_n - f\|_p = (\int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu)^{1/p} \leq (\int_X \varepsilon^p d\mu)^{1/p} = \varepsilon \mu(X)^{1/p}, \quad n \in \mathrm{N},$$

te $f_n \to f$ u $L^p(X)$. ■

Sledeći primer pokazuje da se može desiti da niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ u $L^p(X)$ tačkasto konvergira ka $f \in L^p(X)$, ali da ne konvergira u $L^p(X)$, čak iako je $\mu(X) < +\infty$.

Primer 9.2. Posmatrajmo prostor $X = [0, 2]$ sa Borelovom $\sigma-$ algebrom $\mathcal{B}_{[0,2]}$ i Lebegovom merom m. Niz $f_n = n\kappa_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$, $n \in \mathbf{N}$, konvergira tačkasto ka $f = 0$, ali ne konvergira u $L^p(X)$.

Ipak, uz dodatnu pretpostavku da za niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ postoji funkcija $g \in L^p(X)$ takva da je $| f_n | \leq g$ za svako $n \in \mathbf{N}$ (tj. da postoji Lebeg integrabilna dominanta), tačkasta konvergencija implicira konvergenciju u $L^p(X)$.

Propozicija 9.2. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz u $L^p(X)$ koji konvergira skoro svuda ka f. Ako postoji $g \in L^p(X)$ tako da važi

$$|f_n(x)| \leq g(x), \;\; x \in X, \;\; n \in \mathbf{N},$$

tada $f \in L^p(X)$ i $f_n \to f$ u $L^p(X)$.

Dokaz: Iz pretpostavke sledi $|f(x)| \leq g(x)$ s.s.. Kako $g \in L^p(X)$, važi da je $f \in L^p(X)$. Važi

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq (2g(x))^p \quad \text{s.s..}$$

Kako $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ s.s. i $2^p g^p \in L^1(X)$, na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

■

Prethodno tvrđenje se često koristi pod jednostavnijim uslovima $\mu(X) < \infty$ i $|f_n(x)| < K, \;\; n \in \mathbf{N}, x \in X$ s.s.. Naime, ako je $\mu(X) < \infty$, tada konstantna funkcija pripada $L^p(X)$.

Sledeći primer pokazuje da iz L^p konvergencije ne sledi konvergencija skoro svuda.